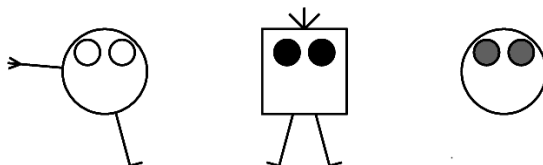


Problème du Cercle de Mathématiques et Physique 2026

Le problème du CMP

Génétique et combinatoire

Dans ce jeu, les personnages créés sont de forme ronde ou carrée, sont chauves ou pas, ont des yeux noirs, gris ou blancs. Pour les bras, 4 cas sont possibles (pas de bras, uniquement le bras droit, uniquement le bras gauche, ou les 2 bras). Il en est de même pour les jambes.



Sur ces trois figures, le premier personnage est rond, chauve, a les yeux blancs, le bras droit et la jambe gauche. Le deuxième personnage est carré, chevelu, a les yeux noirs, n'a pas de bras et a deux jambes. Le troisième personnage est rond, chauve, a les yeux gris et n'a ni bras, ni jambe.

1. Combien peut-on créer de personnages différents dans ce jeu ?
2. Ces personnages sont créés à partir d'un logiciel qui remplit un tableau comprenant deux colonnes de cinq cases, chaque case contenant soit un 1, soit un 0 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. Un tel tableau est appelé la carte génétique du personnage.

1	0
0	0
1	1
0	1
1	0
A	

0	1
1	0
0	1
0	0
1	1
B	

- La première ligne de deux cases correspond à la forme, la deuxième aux cheveux, la troisième aux yeux, la quatrième aux bras et la cinquième aux jambes.
 - Pour que la forme du corps soit carrée il faut et il suffit que les deux cases de la première ligne contiennent des zéros. Dans les autres cas la forme du corps est ronde. On dit que la forme ronde est dominante.
 - Il en est de même à la deuxième ligne où le caractère chauve est dominant.
 - Pour le caractère des yeux, $[1 | 1]$ donne des yeux noirs, $[1 | 0]$ ou $[0 | 1]$ donne des yeux gris et $[0 | 0]$ donne des yeux blancs.
 - Pour les bras $[1 | 1]$ donne deux bras, $[1 | 0]$ donne le bras gauche, $[0 | 1]$ donne le bras droit et $[0 | 0]$ donne aucun bras. Il en est de même pour les jambes.
- a. Combien de cartes génétiques différentes peut-on remplir ?
 - b. Dessiner les deux personnages A et B correspondant aux cartes ci-dessus.
 - c. Donner une carte différente de celle de A et donnant cependant un jumeau de A, soit un personnage visuellement identique à A.
 - d. Un personnage étant créé au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un jumeau de A ? de B ?



3. Dans ce jeu, pour construire d'autres personnages, on peut connecter un couple (X, Y) de personnages déjà construits. La carte génétique du personnage Z issu du croisement du couple de personnages est obtenue de la manière suivante : la colonne de gauche est obtenue à partir de la carte de X en choisissant, pour chacun des cinq caractères, au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) le contenu de l'une des deux cases correspondant à ce caractère. Il en est de même pour la colonne de droite à partir de la carte de Y.

0	1
0	0
0	1
1	0
1	0
X	

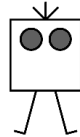
0	1
0	0
1	1
0	0
1	1
Y	

0
0
0
0
1
X'

1
0
1
0
1
Y'

0	1
0	0
0	1
0	0
1	1
Z	

- a. Le croisement (X, Y) donne-t-il toujours le même résultat que le croisement (Y, X) ?
 b. X et Y sont ronds, X a des cheveux, Y est chauve, X a les yeux gris, Y les a noirs et ils ont chacun un bras et une jambe. Le personnage Z issu du croisement (X, Y) est représenté ci-dessous.



Reproduire et compléter les cartes génétiques des trois personnages X, Y et Z

- c. Soit P un personnage issu du croisement de deux personnages de forme ronde créés par le logiciel. Quelle est la probabilité que le personnage P soit de forme carrée ?

En supplément pour ceux qui aiment, un peu d'algèbre

Trouver les solutions de ce système d'équation

$$x + y = 4$$

$$x^5 + y^5 = 464$$