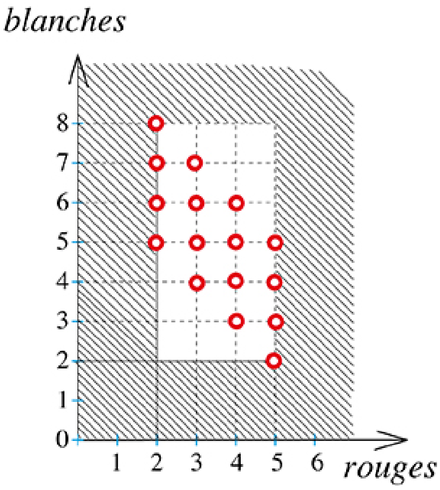
Problème du Cercle de Mathématiques et Physique 2022

Trois problèmes en guise de hors-d'œuvre

Problème 1 : Sac de billes

Un sac contient 20 billes, dont 9 billes blanches, 5 billes rouges et 6 billes noires. On retire 10 billes du sac. On a pris entre 2 et 8 billes blanches, au moins 2 billes rouges et au plus 3 billes noires.
Quel est le nombre de tirages possibles ?

Solution
Portons en abscisse le nombre de billes rouges, compris entre 2 et 5, et en ordonnée le nombre de billes blanches, compris entre 2 et 8.
Il y a, au plus, trois billes noires. On en déduit que la somme des nombres de billes rouges et blanches ne peut prendre que les trois valeurs 8, 9 ou 10.
Le diagramme nous donne le nombre de tirages possibles, égal à 16.



Problème 2 : Nombre impossible

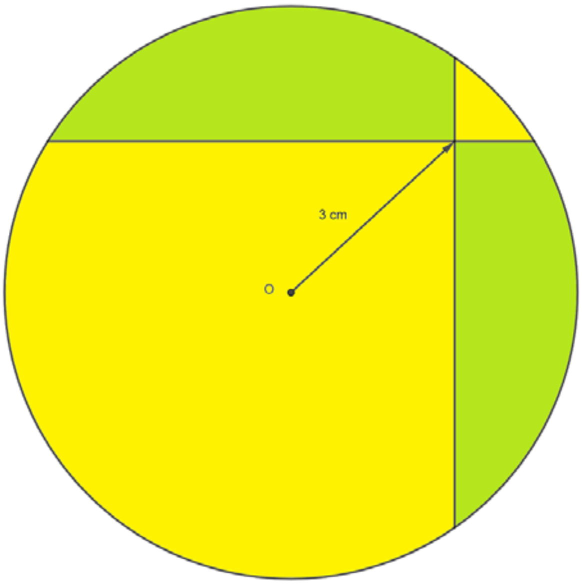
Démontrez qu'il n'existe aucun entier $\boldsymbol{m}$ tel que $\mathbf{3}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{n}+\mathbf{7}=\boldsymbol{m}^{\mathbf{3}}$, où $\boldsymbol{n}$ est également un nombre entier.

Solution

Supposons qu'il existe un entier $\boldsymbol{m}$ tel que $\mathbf{3}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{n}+\mathbf{7}=\boldsymbol{m}^{\mathbf{3}}$.
Alors $\boldsymbol{m}^{\mathbf{3}}=\mathbf{3}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{7}$ est impair, donc $\boldsymbol{m}$ est impair.
Posons $\boldsymbol{m}=\mathbf{2}\boldsymbol{p}+\mathbf{1}$.
On a $\boldsymbol{m}^{\mathbf{3}}=(\mathbf{2}\boldsymbol{p}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}}=\mathbf{8}\boldsymbol{p}^{\mathbf{3}}+\mathbf{12}\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{p}+\mathbf{1}$
Donc
$\mathbf{3}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{7}=\mathbf{8}\boldsymbol{p}^{\mathbf{3}}+\mathbf{12}\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{p}+\mathbf{1}$
$\mathbf{3}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{6}=\mathbf{8}\boldsymbol{p}^{\mathbf{3}}+\mathbf{12}\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{p}$
$\mathbf{3}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{6}=\mathbf{2}\boldsymbol{p}\left(\mathbf{4}\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{p}+\mathbf{3}\right)$
$\mathbf{3}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{6}$ étant un multiple de 3, soit $\boldsymbol{p}$ est multiple de 3, soit $\mathbf{4}\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{p}+\mathbf{3}$ est multiple de 3
Si $\boldsymbol{p}$ n'est pas multiple de 3, alors il existe $\boldsymbol{k}$, tel que $\mathbf{4}\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{p}+\mathbf{3}=\mathbf{3}\boldsymbol{k}$ et $\mathbf{4}\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}(\mathbf{2}\boldsymbol{p}+\mathbf{1})=\mathbf{3}\boldsymbol{k}$**,** d'où contradiction car $\boldsymbol{p}$ devrait multiple 3
Si $\boldsymbol{p}$ est multiple de 3, nous pouvons poser que $\boldsymbol{p}=\mathbf{3}\boldsymbol{q}$.
$\mathbf{3}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{6}=\mathbf{6}\boldsymbol{q}\left(\mathbf{36}\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}}+\mathbf{18}\boldsymbol{q}+\mathbf{3}\right)$
$\mathbf{3}\left(\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{n}+\mathbf{2}\right)=\mathbf{6}\boldsymbol{q}\left(\mathbf{36}\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}}+\mathbf{18}\boldsymbol{q}+\mathbf{3}\right)$.
$\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{n}+\mathbf{2}=\mathbf{2}\boldsymbol{q}\left(\mathbf{36}\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}}+\mathbf{18}\boldsymbol{q}+\mathbf{3}\right)$
$\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{n}+\mathbf{2}=\mathbf{6}\boldsymbol{q}\left(\mathbf{12}\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{q}+\mathbf{1}\right)$
Donc $\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{n}+\mathbf{2}$ est multiple de 6
Le tableau suivant des restes de la division par 3 montre que c'est impossible

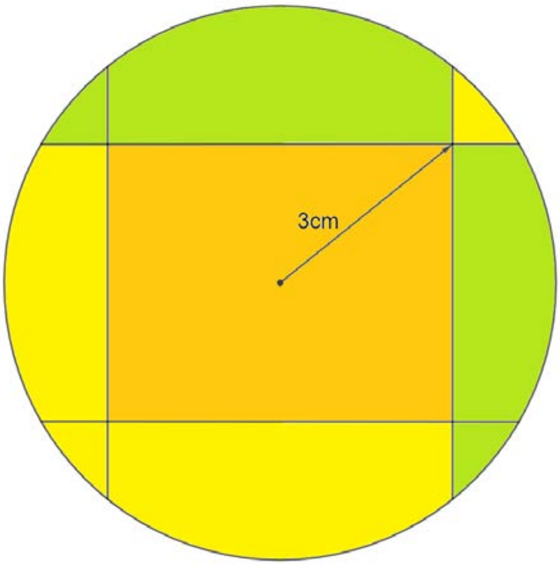
n	n^2	n^2+n+2
0	0	2
1	1	1
2	1	2

Problème 3 : Je veux ma part de tarte



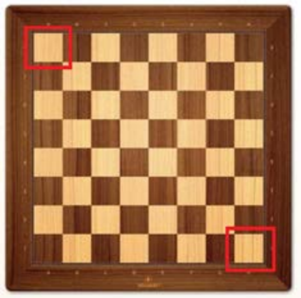
Vue de dessus, cette tarte est un disque parfait de rayon 13 cm. André la découpe en 4 parts, selon 2 segments perpendiculaires dont le point d'intersection se trouve à 3 centimètres du centre. Mathilde choisit les 2 parts opposées en jaune sur le dessin, tandis qu'André conserve les 2 autres en vert.
Il se trouve que la différence entre l'aire totale des parts choisies par Mathilde et celle des parts conservées par André est la plus grande possible (la représentation n'est pas à l'échelle).
Que vaut cette différence, en cm^2 ?

Solution

	En réalisant deux coupes par symétrie. La différence entre les parts choisies par André et celles choisies par Mathilde correspond au rectangle orange central. Or, l'aire d'un carré inscrit dans un cercle est maximale lorsque ce rectangle est un carré. **La valeur maximale de cette différence est donc égale à $(3\sqrt{2})^2$ soit 18 cm^2.**

Plat de résistance : Le problème 2022 du CMP

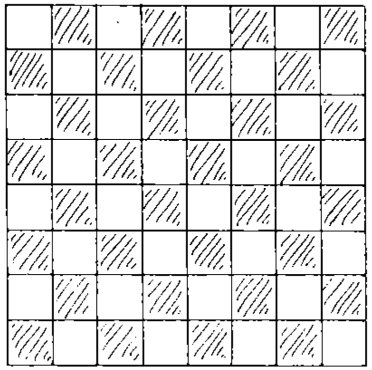
Échiquier et dominos

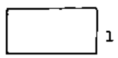


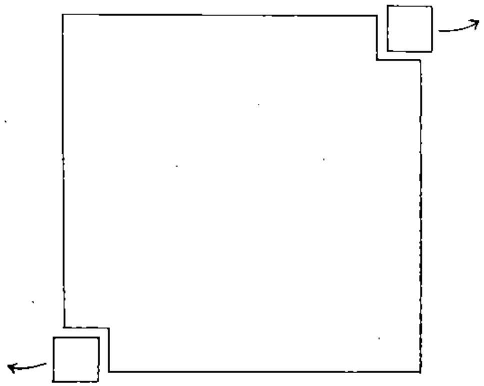
Il est possible de recouvrir un échiquier de 64 cases avec 32 dominos. On démontre qu’il n’est pas possible de placer 31 dominos sur un échiquier en laissant la première case en haut à gauche vide et la dernière case en bas à droite vide. En effet, les 2 cases vides sont situées sur la même diagonale. Elles sont donc de la même couleur. Comme un domino recouvre toujours une case blanche et une case noire, il y aura davantage de cases noires (voir dans l’illustration ci-contre), ce qui rend la solution du problème impossible.
En laissant vide une case blanche quelconque ainsi qu’une case noire quelconque, démontrer qu’il est toujours possible recouvrir l’échiquier.

(b) **Théorème de Gomory**. Voici un problème passionnant concerant un échiquier. Nul besoin de savoir jouer aux échecs pour essayer de le résoudre.

Supposons que l'on dispose d'un échiquier classique de 64 cases et de 32 dominos de dimensions 2 × 1. Il est évident qu'on peut disposer ces dominos de façon à recouvrir complètement l'échiquier. Supposons alors que l'on supprime les deux cases situées aux deux coins opposés et l'un des dominos. Le problème est de savoir si l'on peut ou non recouvrir l'échiquier ainsi privé de ces deux cases avec les 31 dominos restant.







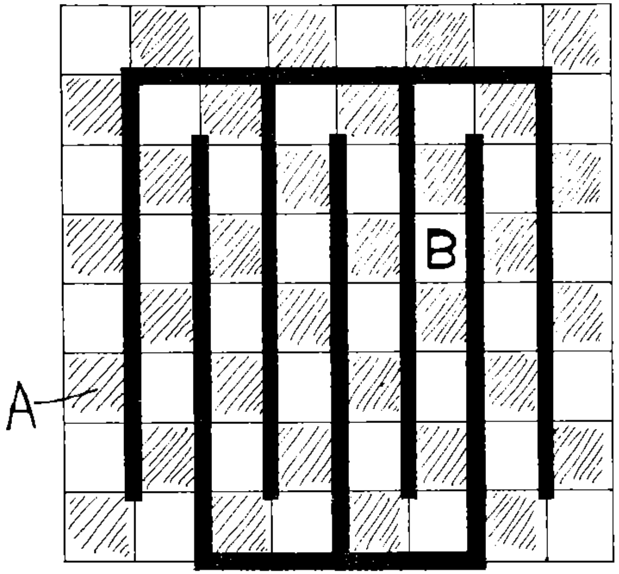
Il n'existe aucun arrangement possible des 31 dominos leur permettant de recouvrir exactement l'échiquier découpé. Un échiquier complet comprend 32 cases noires et 32 cases blanches. En remarquant que les carrés opposés sont de la même couleur, noire par exemple, l'échiquier découpé compte 32 carrés blancs et seulement 30 carrés noires. Comme chaque domino recouvre une paire de carrés adjacents dont l'un est noir et l'autre blanc. Par conséquent, les 31 dominos peuvent recouvrir seulement 31 carrés blancs et non 32 comme cela devait être. Le recouvrement est donc impossible.

Poser le problème à partir du découpage des deux coins opposés est presque sournois. On masque ainsi, qu'en réalité, on élimine deux carrés de la même couleur. Evidemment, quels que soient les emplacements des deux carrés de même couleur éliminés, le problème demeure impossible. La parité est détruite. On peut se poser alors la question de savoir si un recouvrement est possible lorsqu'on enlève un carré blanc est un carré noir. Il n'est pas difficile de voir, qu'au moins dans certains cas, on peut réaliser un recouvrement (par exemple, lorsqu'on élimine deux carrés adjacents). C'est avec une certaine admiration que nous vous présentons le théorème de Ralph Gomory, mathématicien de la compagnie International Business Machines.

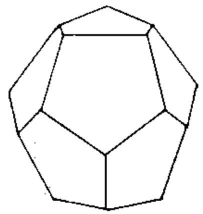
Théorème de Gomory. Quels que soient les emplacements du carré blanc et du carré noir éliminés d'un échiquier, on peut toujours recouvrir l'échiquier à l'aide de 31 dominos de dimensions 2 × 1.

Démonstration. On place sur l'échiquier une fourchette à trois dents et une autre à quatre dents. On obtient ainsi un labyrinthe dans lequel les carrés de l'échiquier sont de couleurs alternées. On peut suivre ce labyrinthe en passant par tous les carrés et revenir au point de départ.

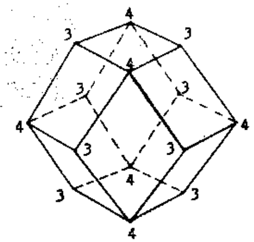
Supposons alors qu'on élimine un carré noir A et un carré blanc B. Il en résulte que le nombre de carrés entre un carré noir et un carré blanc le long d'un chemin du labyrinthe est un nombre pair. Par conséquent, nous pouvons placer un certain nombre de dominos entre A et B en suivant le labyrinthe. On peut penser que les coins présentent des difficultés mais comme on peut placer les dominos dans un sens ou dans l'autre, on est toujours sûr en passant par les coins de ne laisser aucun carré vide. Donc en suivant les deux chemins de A vers B, le long du labyrinthe, nous pouvons recouvrir l'échiquier découpé avec les 31 dominos.



(c) **Le dodécaèdre rhombique.** Dans le chapitre consacré à Louis Pósa, au début du théorème de Dirac, nous avons brièvement parlé de l'irlandais Sir William Rowan Hamilton qui, en 1857, avait inventé un jeu consistant à se déplacer le long des arêtes d'un graphe en passant par les sommets. Notons que l'objectif du jeu était de trouver un circuit le long des arêtes qui ne passât qu'un seule fois par chacun des sommets. Dans le jeu qu'il proposait le graphe était constitué par un dodécaèdre régulier et il y a plusieurs solutions au jeu. Ici, nous allons montrer par un raisonnement simple fondé sur la parité qu'il n'existe pas de circuit hamiltonien à la surface d'un dodécaèdre rhombique. La démonstration est due à l'éminent géomètre canadien, H.S.M. Coxeter.



Dodécaèdre régulier



Dodécaèdre rhombique

Remarquons que chaque sommet a pour valence 3 ou 4 (la valence d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de celui-ci). Chaque sommet de valence 3 est entouré par des sommets de valence 4, c'est-à-dire, que chacune des trois arêtes issues d'un tel sommet aboutit à un sommet de valence 4. Inversement, chaque sommet de valence 4 est entouré par des sommets de valence 3. Par conséquent, un circuit hamiltonien doit passer alternativement par les sommets de valence 3 et de valence 4. Donc, pour passer par les 14 sommets, un tel circuit devrait comporter 7 sommets de chacune des valences. Or il n'y a que 6 sommets de valence 4. On ne peut donc pas décrire de circuit hamiltonien.

(d) **Le problème du geôlier.** En vue d'appliquer les conditions d'une amnistie partielle, un geôlier effectue n rondes le long d'une rangée de n cellules aux portes initialement verrouillées :

A la première ronde, il déverrouille toutes les portes ; à la deuxième ronde, il verrouille une porte sur deux en commençant par la cellule 2 ; à la troisième ronde, il déverrouille une porte sur trois en commençant par la cellule 3 ;

. . . .

. . . .

à la k-ème ronde, il tourne la clé dans les k-èmes serrures en commençant par la cellule k ;

. . . .

à la n-ème ronde, il tourne la clé dans le n-ème serrure en commençant par la cellule n. Après n rondes, quelles sont les cellules qui resteront verrouillées ?