Problème du Cercle de Mathématiques et Physique 2023

Deux problèmes en guise de hors-d’œuvre

Problème 1 :

Trouvez trois nombres tels que leur somme est un carré et que la somme de chaque paire de nombres est aussi un carré.

Solution

Les nombres sont 41, 80 et 320.

> cmp@sje.ch
www.sje.ch
www.diju.ch

Problème 2 :

Vingt hommes, femmes et enfants reçoivent en tout vingt pièces. Chaque homme reçoit trois pièces, chaque femme une pièce et demie et chaque enfant une demi-pièce. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?

Solution

Il y a deux hommes, cinq femmes et 13 enfants

Plat de résistance : Le problème 2023 du CMP

Nombres d'Einstein

Soit a et b deux entiers relatifs, on note $q(a; b)$ le nombre $a^2 + ab + b^2$.
On dit qu'un nombre entier n est un nombre d'Eisenstein s'il existe des entiers relatifs a et b tels que $n = q(a; b)$.
Les nombres d'Eisenstein ont été étudiés par le mathématicien allemand Gotthold Eisenstein (1823-1852).
Cherchons certaines propriétés.

1. Calculer $q(0; 0)$; $q(0; 1)$; $q(0; 2)$; $q(1; 1)$; $q(1; 2)$; $q(-1; 1)$ et $q(-1; 2)$.
2. Montrer que 49 et 91 sont des nombres d'Eisenstein.
3. Montrer que si m est un entier, alors m^2 et $3m^2$ sont des nombres d'Eisenstein.
4. Montrer que si n est un nombre d'Eisenstein, alors $4n$ est aussi un nombre d'Eisenstein.
5. Vérifier l'égalité $a^2 + ab + b^2 = \frac{(2a+b)^2+3b}{4}$. En déduire que tous les nombres d'Eisenstein sont positifs. Montrer que 2 n'est pas un nombre d'Eisenstein.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $q(0\,;0) = 0$; $q(0\,;1) = 1$; $q(0\,;2) = 4$; $q(1\,;1) = 3$; $q(1\,;2) = 7$; $(-1\,;1) = 1$; $(-1\,;2) = 3$.

2. $49 = q(7;0) = q(5;3) = q(8;-5) = q(3;-8) = q(7;-7)$. 18 possibilités.
   $91 = q(1;-10) = q(1;9) = q(5;6) = q(9;-10)$. 12 possibilités.
3. Soit m un entier, alors $m^2 = q(m;0)$ et $3m^2 = q(m;m)$.
4. Soit m un nombre d'Eisenstein, c'est-à-dire que qu'il existe a et b tels que $m = a^2+ab+b^2$. Alors $4m = 4a^2+4ab+4b^2 = (2a)^2+(2a)(2b)+(2b)^2 = q(2a;2b)$.
5. $\dfrac{(2a+b)^2+3b^2}{4} = \dfrac{4a^2+4ab+b^2+3b^2}{4} = a^2+ab+b^2$.

   Comme l'expression $\dfrac{(2a+b)^2+3b^2}{4}$ est une somme de carré, $a^2+ab+b^2 \geqslant 0$ et donc les nombres d'Eisenstein sont toujours positifs.

   Supposons que 2 soit un nombre d'Eisenstein. Il existe alors a et b entiers tels que $\dfrac{(2a+b)^2+3b^2}{4} = 2$. On en déduit que $(2a+b)^2+3b^2 = 8$, soit $(2a+b)^2 = 8-3b^2$. On en déduit que $8-3b^2 \geqslant 0$, donc $8 \geqslant 3b^2$, donc que b vaut -1, 0 ou 1.

   - $b = 0$, entraîne que $4a^2 = 8$, donc $a^2 = 2$, c'est impossible, la racine de deux n'est pas un entier.
   - $b = -1$, entraîne $(2a-1)^2 = 5$. Or la racine de 5 n'est pas un entier, donc le cas est impossible.
   - $b = 1$, de la même manière, ce cas n'est pas possible.

   On en déduit que 2 n'est pas un nombre d'Eisenstein.
6. On a, si n est un nombre d'Eisentein, alors :

$$\frac{(2a+b)^2+3b^2}{4} = n$$

   On en déduit, alors, $\dfrac{3n^2}{4} \leqslant n$, soit $0 \leqslant b \leqslant \sqrt{\dfrac{4n}{3}}$.

   Puis, $(2a+b)^2 \leqslant 4n$, soit $-2\sqrt{n} \leqslant 2a+b \leqslant 2\sqrt{n}$. On en déduit que $-\dfrac{b}{2}-\sqrt{n} \leqslant a \leqslant -\dfrac{b}{2}+\sqrt{n}$.

   Ces deux inégalités vont permettre de donner un algorithme qui permettra de donner les nombres d'Eisentein inférieur à une valeur donnée. Il en trouve d'autre mais on ne retiendra que celle entre 0 et n.

   On a donc l'algorithme suivant :

   Un programme python qui trouve tous les nombres d'Eisenstein, ainsi que les différentes méthodes pour atteindre ce nombre. Il ne s'agit de ne trouver que les nombres atteints, on peut donc faire beaucoup plus simple.

pour b *allant de* 0 *à* $\sqrt{\dfrac{4n}{3}}$ **faire**

  pour a *allant de* $-\dfrac{b}{2}-\sqrt{n}$ *à* $\leqslant -\dfrac{b}{2}+\sqrt{n}$ **faire**

    si $q(a\,;b)$ *n'est pas dans la liste et* $q(a,b)\leqslant n$ **alors**

      ajouter $(a\,;b)$ à la liste

    fin

  fin

fin

```python
from math import *

def Eisentein(n):
    """
    Détermine tous les entiers d'Eisentein entre 0 et n
    n est entier d'Eisentein si n = a^2 + ab + b^2
    =  ((2a+b)^2+3b^2)/4
    renvoie un dictionnaire dont la clé est n, et les valeurs sont
    stockées dans une liste de tuple.
    """
    resultat = {}
    maxb = int(sqrt(4*n/3))
    for b in range(0,maxb):
        for a in range(int(-b/2-sqrt(n)),int(-b/2+2*sqrt(n))+1):
            m = a*a +a*b + b*b
            if m in resultat :
                liste = resultat[m]
                liste.append((a,b))
                resultat[m]=liste
            elif m not in resultat and m<= n :
                resultat[m] = [(a,b)]

    resultatTrie = {}
    for i in range(n) :
        if i in resultat :
            resultatTrie[i] = resultat[i].copy()
    return resultatTrie

print(Eisentein(25))
```

On obtient : `0: [(0, 0)], 1: [(-1, 0), (1, 0), (-1, 1), (0, 1)], 3: [(-2, 1), (1, 1), (-1, 2)], 4: [(-2, 0), (2, 0), (-2, 2), (0, 2)], 7: [(-3, 1), (2, 1), (-3, 2), (1, 2), (-2, 3), (-1, 3)], 9: [(-3, 0), (3, 0), (-3, 3), (0, 3)], 12: [(-4, 2), (2, 2), (-2, 4)], 13: [(-4, 1), (3, 1), (-4, 3), (1, 3), (-3, 4), (-1, 4)], 16: [(-4, 0), (4, 0), (-4, 4), (0, 4)], 19: [(-5, 2), (3, 2), (-5, 3), (2, 3)], 21: [(-5, 1), (4, 1), (-5, 4), (1, 4)]`

Les nombres d'Eisentein sont donc 0, 1, 3, 4, 7, 9, 12, 16 et 19.

7. Posons $a=3p+r$ et $b=3q+s$ avec r et s des entiers compris entre 0 et 2.

Considérons :

$$\begin{aligned} a^2+ab+b^2 &= (3p+r)^2+(3p+r)(3q+s)+(3q+s)^2 \\ &= 3N+r^2+rs+s^2 \end{aligned}$$

Il nous faut regarder les valeurs de r^2+rs+s^2. On obtient le tableau 1, on ne regarde que le reste de la division par 3. On constate que l'on ne peut avoir de nombre de la forme $3n-1$ ou ce qui revient au mmême, de nombre de la forme $3n+2$.

	0	1	2
0	0	1	1
1	1	0	1
2	1	1	0

TABLE 1

8. Développons les deux expressions.

$$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2) =& a^2c^2+a^2cd+a^2d^2 \\ &+abc^2+abcd+abd^2 \\ &+b^2c^2+b^2cd+b^2d^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(ac+bc+bd)^2+(ac+bc+bd)(ad-bc)+(ad-bc)^2 \\ &\quad = a^2c^2+abc^2+abcd+abc^2+b^2c^2+b^2cd+abcd \\ &\quad + b^2cd+b^2d^2+a^2cd+abcd+abd^2-abc^2 \\ &\quad - b^2c^2-b^2cd+a^2d^2-2abcd+b^2c^2 \\ &\quad = a^2c^2+a^2cd+a^2d^2 \\ &\quad +abc^2+abcd+abd^2 \\ &\quad +b^2c^2+b^2cd+b^2d^2\end{aligned}$$

On en déduit que le produit de deux nombres d'Eisentein $q\,(a\,;b)$ et $q\,(c\,;d)$ est le nombre d'Eisentein $q\,(ac+bc+bd\,;ac-bc)$.

9. Soit n un multiple de 9.

n est un nombre d'Eisentein si et seulement si $\dfrac{n}{3}$ est un nombre d'Eisentein.

Commençons par démontrer que si $\dfrac{n}{3}$ est un nombre d'Eisentein alors n l'est aussi.

On peut écrire $n = 3\times\dfrac{n}{3}$, or le produit de deux nombres d'Eisentein est un nombre d'Eisentein.

Réciproquement, si n est un nombre d'Eisentein, alors $\dfrac{n}{3}$ est aussi un nombre d'Eisentein.
$n = a^2 + ab + b^2$, avec $a = 3p + r$ et $b = 3q + s$.
Alors

$$a^2 + ab + b^2 = 9(p^2 + pq + q^2) + 3(2pr + ps + qr + 2qs) + r^2 + rs + q^2$$

En étudiant cette expression, nous devons déjà avoir $r^2 + rs + q^2$ multiple de 9.
Or, l'observation du tableau de la question amène à dire que $r = s$.

- $r = s = 0$, soit a et b sont tous les deux divisibles par 3, alors $\dfrac{n}{9} = q\left(\dfrac{a}{3}\,;\,\dfrac{n}{3}\right)$.
  Alors, on a $\dfrac{n}{3} = 3 \times \dfrac{n}{9}$, et on en déduit que $\dfrac{n}{3}$ est un nombre d'Eisentein.
- $r = s = 1$, on a alors

  $$a^2 + ab + b^2 = 9(p^2 + pq + q^2) + 3(2p + p + q + 2q) + 3$$

  qui n'est pas multiple de 9.
- $r = s = 2$

  $$a^2 + ab + b^2 = 9(p^2 + pq + q^2) + 3(4p + 2p + 2q + 4q) + 12$$

  qui n'est pas multiple de 9.