Problème du Cercle de Mathématiques et Physique 2024

Un problème en guise de hors-d'œuvre

Des nombres en spirale

En écrivant les nombres entiers positifs non nuls en spirale on voit apparaître une infinité d'anneaux concentriques.
Sur l'anneau 1 figurent les nombres entiers de 2 à 9, sur l'anneau 2 les nombres entiers de 10 à 25, sur l'anneau 3 les nombres entiers de 26 à 49, ...

65	64	63	62	61	60	59	58	57
66	37	36	35	34	33	32	31	56
67	38	17	16	15	14	13	30	55
68	39	18	5	4	3	12	29	54
69	40	19	6	1	2	11	28	53
70	41	20	7	8	9	10	27	52
71	42	21	22	23	24	25	26	51
72	43	44	45	46	47	48	49	50
73	74	75	76	77	78	79	80	81

1. L'anneau 1 est formé de huit entiers naturels.
   - Combien de nombres entiers forment l'anneau 2 ?
   - Combien de nombres entiers forment l'anneau 3 ?
   - Combien de nombres entiers forment l'anneau 6 ?
   - Pour n non nul fixé, combien de nombres entiers forment l'anneau n ?

2. On s'intéresse aux suites croissantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers appartenant à des anneaux consécutifs de la spirale et alignés en diagonale.
   La figure ci-contre donne un exemple d'une telle suite avec $u_0 = 22$, $u_1 = 44$ et $u_2 = 74$.

-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	15	14	13	-	-
-	-	-	5	4	3	12	-	-
-	-	-	6	1	2	11	-	-
-	-	-	7	8	9	10	-	-
-	-	-	u_0	-	-	-	-	-
-	-	u_1	-	-	-	-	-	-
-	u_2	-	-	-	-	-	-	-

   - **Diagonale 1**
     La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n^2 + 12n + 7$ génère une diagonale de cette spirale. Combien de nombres premiers peut-on compter parmi les cinq premiers nombres entiers de cette spirale ? Quels sont-ils ?

   - **Diagonale 2**
     Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 1$, $u_1 = 9$, $u_2 = 25$, $u_3 = 49$, $u_4 = 81$... Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

   - **Diagonale 3**
     Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 36$, $u_3 = 64$ ...
     On admet qu'il existe trois nombres entiers naturels a, b, c tels que, pour tout entier naturel n, le terme un de cette suite peut s'écrire sous la forme suivante : $u_n = an^2 + bn + c$.
     Déterminer les nombres a, b, c.

3. Un anneau pour une année
   Quel est le numéro de l'anneau de la spirale sur lequel est situé le nombre 2024 (année actuelle) ?

cmp@sje.ch
www.sje.ch
www.diju.ch

Plat de résistance : Le problème 2024 du CMP

Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

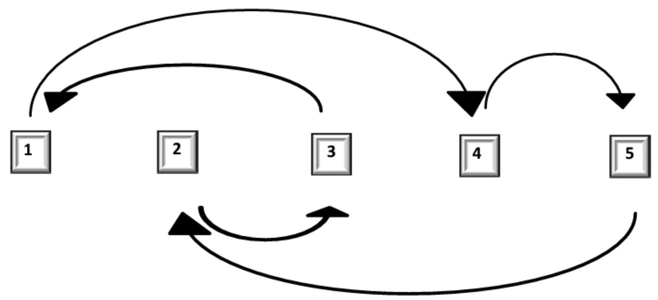
Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées 1, 2, …, n, où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il laisse son vélo à la maison 1, y dépose le courrier correspondant, puis distribue les lettres dans les autres maisons, et enfin, revient à la maison 1 récupérer son vélo. Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.
Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est 1 → 4 → 5 → 2 → 3 → 1. Si on note $d(a;b)$ la distance séparant les maisons a et b, alors on a :

$$d(a;b) = \begin{cases} a - b \text{ si } a \geq b \\ b - a \text{ si } a < b \end{cases}$$

Par exemple :

- la distance séparant les maisons 1 et 4 est $d(1\,;4) = 4 - 1 = 3$;
- la distance séparant les maisons 5 et 2 est $d(5\,;2) = 5 - 2 = 3$.

Enfin, la distance totale parcourue, appelée aussi longueur du trajet, est la somme des distances séparant les différentes maisons visitées.
Dans l'exemple du trajet : 1 → 4 → 5 → 2 → 3 → 1, la longueur du trajet est 10 :



$d(1\,;4) + d(4\,;5) + d(5\,;2) + d(2\,;3) + d(3\,;1) = 3+1+3+1+2 = 10.$

1. Dans cette partie on a $n = 5$.
   - Justifier que le trajet 1 → 3 → 5 → 4 → 2 → 1 est de longueur 8.
   - Donner un trajet de longueur 12.
   - Combien y a-t-il de trajets différents possibles ?
   - Quelle est la longueur minimale d'un trajet ?
   - Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?

2. Dans cette partie n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.
   - Combien y a-t-il de trajets possibles ?
   - Montrer que la longueur minimale d'un trajet est égale à $2(n - 1)$.
   - Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?

3. Dans cette partie, on s'intéresse à la longueur maximale d'un trajet.
   - Déterminer tous les trajets de longueur maximale dans le cas où $n = 4$.
   - Déterminer la longueur maximale d'un trajet si $n = 5$ puis donner un exemple de trajet de longueur maximale.
   - Montrer que pour tout entier supérieur ou égal à 2, la longueur maximale d'un trajet est inférieure ou égal à $\frac{n^2}{2}$.
   - Montrer que la longueur maximale d'un trajet est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{2}$

Adresser votre réponse à :
Pierre-Olivier Vallat, Rue du Temple 24, 2735 Bévilard
pov@povallat.net

Bonus historique en lien avec l'un des problèmes 2023

Tiré de l'ouvrage « Énigmes mathématiques au temps de Charlemagne - à propos des *propositiones* pour aiguiser l'esprit des jeunes » de Jérôme Gavin et Philippe Genequand aux éditions EPFL Press (2021), une énigme rédigée dans le langage de l'époque

(32) À propos d'un certain père de famille qui distribue du grain

Un certain père de famille à une famille de 20 [personnes][1] et il ordonne de leur donner 20 mesures de grains de façon à ce que les hommes reçoivent trois mesures, les femmes deux et les enfants une demie. Que dise, qui le peut, combien il y a d'hommes et de femmes et d'enfants [dans la famille].

Solution

Prends une fois trois, soit 3 ; un homme reçoit 3 mesures. De même, cinq fois deux font dix, c'est-à-dire que cinq femmes reçoivent dix mesures. Prends donc sept fois, deux soit 14, donc 14 enfants reçoivent 7 mesures. Additionne 1 et 5 et 14, ce qui fait 20. Ainsi il y a 20 membres dans la famille. Et ensuite additionne 3,7 et 10, ce qui fait 20 ce qui est le nombre de mesures. Donc on a en même temps 20 personnes et 20 mesures [de grains].

[1] Texte ajouté par le traducteur