Écriture dans les bases

Claude Fuhrer & Paul Jolissaint

Soit $b > 1$ un entier. Il est connu de tous que tout nombre $x \in]0,1[$ admet au moins une représentation dans la base b : il existe une suite d'entiers (les digits) $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ tels que

$$x = \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \cdots + \frac{d_n}{b^n} + \cdots.$$

On dit que x *admet une décomposition finie dans la base* b si l'on peut trouver une suite de digits (d_n) comme ci-dessus pour laquelle il existe un entier $N > 0$ tel que $d_n = 0$ pour tout $n > N$.

Par exemple, si $b = 10$ (dix), le nombre $x = 1/2 = 0.5$ admet une décomposition finie dans la base 10, mais $x = 1/3$ n'en admet pas. Cela amène le problème suivant :

Problème. *Étant donnés deux entiers supérieurs à* 1 *et distincts* b *et* B*, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que tout nombre admettant une décomposition finie dans la base* b *admette aussi une décomposition finie dans la base* B *?*

Compléments à propos de l'écriture dans une base b : tout nombre $x \in]0,1[$ admet un développement en base b :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{b^n}$$

où $d_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Le développement est unique sauf pour les nombres de la forme $x = a/b^N$ avec a entier. Ces derniers sont nécessairement rationnels et ils admettent exactement deux développements : un de la forme

$$x = \frac{d_1}{b} + \cdots + \frac{d_N}{b^N}$$

avec $d_N \geq 1$, et l'autre, qui est

$$x = \frac{d_1}{b} + \cdots + \frac{d_N - 1}{b^N} + \frac{1}{b^N} = \frac{d_1}{b} + \cdots + \frac{d_N - 1}{b^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n}.$$

En effet, soit $x \in]0,1[$ un nombre qui admet deux développements en base b ; écrivons ceux-ci :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_n}{b^n}$$

avec $d_n, d'_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Puisque les deux développements sont distincts, soit N le plus petit entier positif tel que $d_N \neq d'_N$, disons, pour fixer les idées, que $d'_N \leq d_N - 1$. On obtient :

$$\frac{d_N}{b^N} + \sum_{n>N} \frac{d_n}{b^n} = \frac{d'_N}{b^N} + \sum_{n>N} \frac{d'_n}{b^n},$$

car on a aussi $d_n = d'_n$ pour tout $n < N$. Alors, puisque $d'_n - d_n \leq b - 1$ pour tout $n > N$, on obtient la chaîne d'inégalités :

$$\frac{1}{b^N} \leq \frac{d_N - d'_N}{b^N} = \sum_{n>N} \frac{d'_n - d_n}{b^n} \leq \sum_{n>N} \frac{b-1}{b^n} = \frac{1}{b^N}.$$

En effet, en utilisant la série géométrique $\sum_{n\geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}$ pour tout $|t| < 1$, on a

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{b-1}{b^{N+1}} \cdot \frac{1}{1-1/b} = \frac{1}{b^N}.$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités, et cela implique que $d'_N = d_N - 1$, $d_n = 0$ et $d'_n = b-1$ pour tout $n > N$.

Par exemple, $0,412 = 0,4119999\cdots = 0,411\bar{9}$ car en calculant explicitement,

$$\frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + 9 \cdot \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \cdots\right).$$

Solution. *Soient* $\{p_1, \ldots, p_k\}$ et $\{q_1, \ldots, q_l\}$ *les listes des facteurs premiers des décompositions de* b *et* B *en facteurs premiers respectivement. Alors la condition est que*

$$\{p_1, \ldots, p_k\} \subset \{q_1, \ldots, q_l\}.$$

Preuve. Observons pour commencer que la condition du problème se traduit ainsi :
Pour que tout $x \in]0, 1[$ *qui admet une décomposition finie dans la base* b *admette également une décomposition finie dans la base* B*, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers positifs* n *et* m *tels que*

$$\frac{1}{b} = \frac{m}{B^n}.$$

Si c'est le cas, si p est un facteur premier de la décomposition de b, alors l'égalité équivalente $b \cdot m = B^n$ implique que p divise B^n, donc B. Cela démontre que chaque facteur premier de la décomposition de b est un facteur de la décomposition de B.

Réciproquement, supposons que $\{p_1, \ldots, p_k\} \subset \{q_1, \ldots, q_l\}$. Notons alors

$$b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad B = q_1^{\beta_1} \cdots q_\ell^{\beta_\ell}$$

les décompositions des deux bases en facteurs premiers. De plus, quitte à renuméroter, on suppose que $p_j = q_j$ pour tout $j \leq k$. Posons alors $n = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. On a, puisque $\beta_j n \geq \alpha_j$ pour tout $j \leq k$:

$$B^n = p_1^{\beta_1 n} \cdots p_k^{\beta_k n} \cdots q_\ell^{\beta_\ell n} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \underbrace{(p_1^{\beta_1 n - \alpha_1} \cdots p_k^{\beta_k n - \alpha_k} \cdots q_\ell^{\beta_\ell n})}_{=:m} = b \cdot m$$

avec m entier. On en déduit que

$$\frac{1}{b} = \frac{m}{B^n}.$$

□