Des casse-tête, Des casse-tête, Des casse-tête, **encore Des casse-tête**, …

Les problèmes 1 et 2 sont là pour maintenir la forme !

Problème 1

Dans une loterie, le montant maximal qu'on peut gagner est 50'000 francs.
Onze amis joueurs n'ont pas gagné le montant le plus élevé, mais un montant tel qu'après se l'être partagé en parts égales, il restait un solde de 10 francs.
Un des joueurs fait observer que s'ils avaient été dix, le solde après partage aurait été de 9 francs ;

- que s'ils avaient été neuf, le solde après partage aurait été de 8 francs,
- que s'ils avaient été huit, le solde après partage aurait été de 7 francs,
- que s'ils avaient été sept, le solde après partage aurait été de 6 francs,
- que s'ils avaient été six, le solde après partage aurait été de 5 francs,
- que s'ils avaient été cinq, le solde après partage aurait été de 4 francs,
- que s'ils avaient été quatre, le solde après partage aurait été de 3 francs,
- que s'ils avaient été trois, le solde après partage aurait été de 2 francs,
- que s'ils avaient été deux, le solde après partage aurait été de 1 franc.

Question : quel montant les onze joueurs ont-ils gagné ?

Problème 2

Trois missionnaires et trois cannibales qui se trouvent sur la rive droite d'une rivière veulent rejoindre la rive gauche à l'aide d'une barque qui ne peut contenir au plus que deux passagers à la fois. Si les cannibales sont plus nombreux que les missionnaires sur l'une des deux rives, les missionnaires seront tués et mangés !
N.B. Le ou les occupants du bateau débarque(nt) obligatoirement sur la rive.
Les six protagonistes peuvent-ils traverser sains et saufs ? S'ils le peuvent, comment y parviennent-ils avec un minimum de traversées ?

… et si $m=4$, $c=4$ avec au plus deux passagers dans la barque ?
… et si $m=4$, $c=4$ avec au plus trois passagers dans la barque ?

Deux cubes, trois cubes
Problème CMP 2013

Adressez votre réponse à :
Charles Félix, Sous les Pins 812, 2902 Fontenais

Tournez la page ☞

Deux cubes, trois cubes
Problème CMP 2013

1. **Avec deux cubes**
   Comment disposer des chiffres sur les douze faces (un chiffre par face ; on considérera les chiffres « 6 » et « 9 » comme étant différents) de deux cubes de même dimension de façon à pouvoir, en les plaçant côte à côte, former tous les jours du mois ?

2. **Avec trois cubes**
   a) Comment disposer des lettres **majuscules** sur les dix-huit faces (une lettre par face) de trois cubes de même dimension de façon à pouvoir, en les plaçant côte à côte, former les trois premières lettres de n'importe lequel des douze mois de l'année ?
   b) Comment disposer des lettres **minuscules** sur les dix-huit faces (une lettre par face) de trois cubes de même dimension de façon à pouvoir, en les plaçant côte à côte, former les trois premières lettres de n'importe lequel des douze mois de l'année ?
   On considérera que la lettre « n » peut jouer le rôle de la lettre « u » et réciproquement ; de même la lettre « d » peut jouer le rôle de la lettre « p » et réciproquement; on ajoutera en outre la lettre « il » pour pouvoir distinguer les mois de juin (jui) et juillet (ju « il »).

Ecriture dans les bases
Problème Hors-catégorie

proposé par Claude Fuhrer et Paul Jolissaint
Adressez votre réponse à :
Charles Félix, Sous les Pins 812, 2902 Fontenais

Soit $b > 1$ un entier. Il est connu de tous que tout nombre $x \in]0;\ 1[$ admet au moins une représentation dans la base b : il existe une suite d'entiers (les digits) $d_1, d_2, \ldots \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ tels que

$$x = \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \cdots + \frac{d_n}{b^n} + \cdots.$$

On dit que x *admet une décomposition finie dans la base* b si l'on peut trouver une suite de digits (d_n) comme ci-dessus pour laquelle il existe un entier $N > 0$ tel que $d_n = 0$ pour tout $n > N$.
Par exemple, si $b = 10$ (dix), le nombre $x = 1/2 = 0.5$ admet une décomposition finie dans la base 10, mais $x = 1/3$ n'en admet pas. Cela amène le problème suivant :

Problème. *Étant donnés deux entiers supérieurs à* 1 *et distincts* b *et* B*, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que tout nombre admettant une décomposition finie dans la base b admette aussi une décomposition finie dans la base* B *?*

Compléments à propos de l'écriture dans une base b : tout nombre $x \in]0;\ 1[$ admet un développement en base b :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{b^n}$$

où $d_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Le développement est unique sauf pour les nombres de la forme $x\ = a/b^N$ avec a entier. Ces derniers sont nécessairement rationnels et ils admettent exactement deux développements : un de la forme

$$x = \frac{d_1}{b} + \cdots + \frac{d_N}{b_N}$$

avec $d_N \geq\ 1$, et l'autre, qui est

$$x = \frac{d_1}{b} + \cdots + \frac{d_N - 1}{b^N} + \frac{1}{b^N} = \frac{d_1}{b} + \cdots + \frac{d_N - 1}{b^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n}.$$

En effet, soit $x \in]0;\ 1[$ un nombre qui admet deux développements en base b ; écrivons ceux-ci :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_n}{b^n}$$

avec $d_n, d'_n \in \{0,1, \dots, b-1\}$. Puisque les deux développements sont distincts, soit N le plus petit entier positif tel que $d_N \neq d'_N$, disons, pour fixer les idées, que $d'_N \leq d_N - 1$. On obtient :

$$\frac{d_N}{b^N} + \sum_{n>N} \frac{d_n}{b^n} = \frac{d'_N}{b^N} + \sum_{n>N} \frac{d'_n}{b^n},$$

car on a aussi $d_n = d'_n$ pour tout $n\ <\ N$. Alors, puisque $d'_n - d_n \leq b - 1$ pour tout $n\ >\ N$, on obtient la chaîne d'inégalités :

$$\frac{1}{b^N} \leq \frac{d_N - d'_N}{b^N} = \sum_{n>N} \frac{d'_n - d_n}{b^n} \leq \sum_{n>N} \frac{b-1}{b^n} = \frac{1}{b^N}.$$

En effet, en utilisant la série géométrique $\sum_{n\geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}$ pour tout $|t|\ <\ 1$, on a

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{b-1}{b^{N+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} = \frac{1}{b^N}.$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités, et cela implique que $d'_N = d_N - 1, d_n = 0$ et $d'_n = b - 1$ pour tout $n\ >\ N$.
Par exemple, $0{,}412\ =\ 0{,}4119999\ \dots\ =\ 0{,}411\overline{9}$ car en calculant explicitement,

$$\frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + 9 \cdot \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \cdots\right).$$

Novembre 2013